

КРИВОРІЗЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ ІНСТИТУТ

УДК 530.1

СЕМЕРІКОВ Сергій Олексійович

**МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ
ФРАКТАЛЬНИХ ОБ'ЄКТІВ**

НАПРЯМОК – математика (математична освіта)

АВТОРЕФЕРАТ

*дисертації на здобуття освітнього ступеня
магістра математики*

КРИВИЙ РІГ – 1998

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана у Криворізькому державному педагогічному інституті Міністерства освіти України.

Науковий керівник: СОЛОВЙОВ Володимир Миколайович,
доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри інформатики та прикладної математики Криворізького державного педагогічного інституту

Консультант: РАШЕВСЬКИЙ Микола Олександрович,
кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри математики Криворізького державного педагогічного інституту

Захист відбудеться "24" червня 1998 р. о 9 годині на засіданні державної екзаменаційної комісії у Криворізькому державному педагогічному інституті Міністерства освіти України за адресою: 324086, м. Кривий Ріг, пр. Гагаріна, 54, фізико-математичний факультет.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

АКТУАЛЬНІСТЬ ТЕМИ ДОСЛІДЖЕННЯ. Відсутність загальних методів обчислення розмірності геометричних об'єктів приводить до необхідності використання статистичних методів, а неможливість спостереження багатьох з них у природних умовах – до створення відповідних моделей цих явищ.

Найбільш повно відображає природу розмірності міра Хаусдорфа-Безіковича (НВ-міра). Суттєвим є те, що ця гранична міра дозволяє ввести розмірності, що не є цілочисельними. Великий клас об'єктів, НВ-розмірність яких відрізняється від топологічної, становлять інтерес як для математиків, так і для науковців інших галузей науки цікавими властивостями, що вони виявляють (неперервні скрізь недиференційовні функції, множини Кантора, самоафінні та самоподібні множини і т.п.).

Багато спостережень природних процесів приводять до часових залежностей, або рядам вимірів. Тривалі виміри, наприклад, температури виявляють її випадкову поведінку як на малих, так й на довгих інтервалах часу. Дослідження часових рядів звичайними методами не дає суттєвої інформації про характер випадкового процесу, його персистентність чи антиперсистентність. В зв'язку з цим виникає необхідність застосування таких статистичних методів, які б давали необхідну інформацію.

Моделювання випадкового, або броуновського руху, дозволяє встановити властивість подібності одновимірних випадкових рухів і ввести поняття узагальненого броунівського руху. Відомо, що криві броуновського руху мають фрактальну розмірність, що приводить до необхідності визначення випадкових фракталів. Важливим є переніс цього поняття з площини у простір, що дало б можливість побудови фрактальних поверхонь. Такі поверхні можуть досить правдоподібно відтворювати ландшафти, береги, хмари і т.ін. завдяки можливості їх описання як послідовності випадкових накладень.

ЗВ'ЯЗОК РОБОТИ З НАУКОВИМИ ПРОГРАМАМИ, ПЛАНАМИ. Робота виконувалась за сприянням Міжнародної науково-освітньої програми, гранти ISSEP № GSU071016 та МНОП № GSU080168.

ОСНОВНА МЕТА ДОСЛІДЖЕННЯ полягала в розробці імітаційних комп'ютерних моделей різних геометричних об'єктів, які б дозволили обчислювати фрактальну розмірність при різних параметрах моделі, накопичувати статистику та порівнювати розмірності передфракталів різних порядків.

Відповідно до мети, було необхідно вирішити наступні **ЗАДАЧІ**:

- на прикладі регулярних фракталів дослідити динаміку зміни розмірності передфракталів та встановити, передфрактали якого покоління достатні для задач моделювання;
- дослідити кластероутворюючі імітаційні геометричні моделі на основі АОД, визначити загальні підходи до обчислення розмірностей об'єктів, що утворюються при моделюванні;
- методом нормованого розмаху дослідити функцію, що моделює узагальнений броунівський рух;
- узагальнити алгоритм випадкових накладань на n-вимірний простір та застосувати його до генерації поверхонь випадкового накладання та випадкового переносу і побудови тривимірних моделей природних об'єктів.

НАУКОВА НОВИЗНА ДОСЛІДЖЕННЯ полягає в такому:

1. Запропоновано загальний підхід до моделювання кластероутворюючих об'єктів, розроблено комп'ютерні моделі та чисельний метод визначення їх розмірності.
2. Проведено розрахунок фрактальної розмірності деяких об'єктів статистичного походження, що не досліджувалися раніше.
3. Побудовано приклади фрактальних поверхонь шляхом розповсюдження алгоритму випадкових накладань на комплексну площину, отримано графічну інтерпретацію при різних параметрах.

ПРАКТИЧНЕ ЗНАЧЕННЯ ДОСЛІДЖЕННЯ. Результати дослідження дозволяють рекомендувати методи комп'ютерного моделювання як ефективний засіб дослідження складних об'єктів шляхом імітації їх суттєвих властивостей, а саме тих, що визначають їх розмірність. Зручність та простота побудованих моделей роблять можливим їх використання у навчальному процесі не лише в вузі, а й в школі.

ОСОБИСТИЙ ВНЕСОК ЗДОБУВАЧА. У працях, опублікованих у співавторстві, автору належать такі результати:

1. Розроблено комп'ютерний метод моделювання кластероутворюючих об'єктів та чисельний метод визначення їх розмірності.
2. Проведено розрахунок фрактальної розмірності численних об'єктів як аналітичного, так й статистичного походження.
3. Розповсюджено алгоритм випадкових накладань Р.Ф. Фосса на комплексну площину, отримано графічну інтерпретацію при різних показниках Херста.

АПРОБАЦІЯ РОБОТИ. Результати досліджень обговорювались на:

- Міжнародній науково-методичній конференції “Новітні технології навчання у вищих та середніх навчальних закладах” (Рівне, 1997).
- Всеукраїнській конференції “Допрофесійна підготовка учнівської молоді в контексті реалізації цільової комплексної програми "Вчитель"" (Кривий Ріг, 1998).
- Міжнародній науково-практичній конференції “Проблеми електронної промисловості у перехідний період” (Луганськ, 1998).

ПУБЛІКАЦІЇ. За матеріалами дисертації опубліковано 3 роботи.

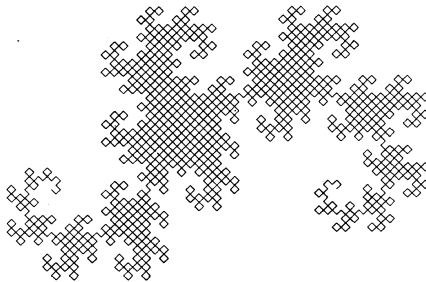
СТРУКТУРА ДИСЕРТАЦІЇ. Дисертації складається з вступу, трьох розділів та списку використаної літератури (26 найменувань). Робота виконана в обсязі 71 сторінки.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **ВСТУПІ** обґрунтовується актуальність обраної теми, аналізується ступінь розробленості проблеми, розкривається науково-теоретичне й практичне значення дисертації, її логічна структура.

У **ПЕРШОМУ РОЗДІЛІ** - «Фрактальна розмірність» - наведено огляд основних уявлень про фрактали і фрактальну розмірність, розмірність подібності та кластерну розмірність. На класичних прикладах (довжина берегової лінії, площа бічної поверхні циліндра) вводиться поняття фрактальної розмірності та досліджуються найпростіші фрактали – серветка та килим Серпінського, сніжинка Кох, криві Мандельброта-Гівена.

Далі, за аналогією з однорідністю функцій, вводиться поняття скейлінгу – масштабної інваріантності, яке розглядається на прикладі функції Вейерштрасса та множин Кантора. Узагальнення кривої Кох на основі цього поняття приводить до побудови сімейства кривих Кох, що відрізняються як визначенням довжини шага та просторовою орієнтацією, так і розмірністю (мал. 1).



Мал. 1. Дракон Хартера-Хейтуея, розмірність – 2.

У **ДРУГОМУ РОЗДІЛІ** - «Випадкове блукання» - розглядається статистичний метод, який можна ефективно застосувати до аналізу експериментальних сигналів, що отримуються при спостереженні природних явищ – метод Херста, або метод нормованого розмаху. У цьому методі індикаторною величиною є безрозмірне відношення R/S , де R – розмах (найбільша відстань між мінімальним та максимальним значенням спостережуваного явища), S – стандартне відхилення, причому

$$R/S = (\tau/2)^H,$$

де τ - час спостереження, H - показник Херста, що визначає вид ряду і пов'язаний з розмірністю співвідношенням $D=2-H$.

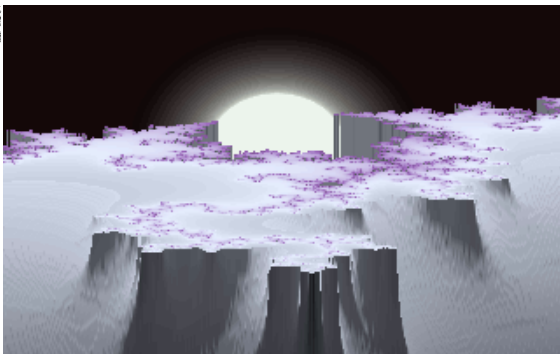
Методом нормованого розмаху було досліджено декілька наборів експериментальних даних, що дало значення $H=0,73 \pm 0,09$; отримані результати дозволили смодельовати випадкові ряди, встановити властивість подібності одновимірних випадкових блукань та застосувати метод R/S для дослідження узагальненого броунівського руху.

У **ТРЕТЬОМУ РОЗДІЛІ** - «Фрактальні поверхні» - розглянуто співвідношення периметра та площини природних об'єктів, введено поняття розширеного регулярного фракталу, запропоновано модифікацію алгоритма випадкових блукань для тривимірного простору, який складає комплексна площа та перпендикулярний до неї модуль комплексної функції.

Узагальнено алгоритм Фосса для багатовимірного простору, показано можливості генерації фрактальних поверхонь перенесення (мал. 2).



Мал. 2. Фрактальна множина у вигляді “місячного пейзажу” та хмари ($H=0,7$, зліва) та множина Мандельброта (знизу).



СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ З ТЕМИ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Завієна Н.С., Семеріков С.О., Хараджян О.А. Ефективне використання ресурсів комп'ютера в курсі "Основи комп'ютерного моделювання" // Новітні технології навчання у вищих та середніх навчальних закладах. Збірник матеріалів міжнародної науково-методичної конференції, 7-9 жовтня 1997 р. – Рівне: УДАВГ, 1997. – 83 с., с. 19.
2. Соловійов В.М., Семеріков С.О., Теплицький І.О. Основи комп'ютерного моделювання в середній школі та педагогічному вузі // Допрофесійна підготовка учнівської молоді в контексті реалізації цільової комплексної програми "Вчитель". Збірник науково-практичних матеріалів Всеукраїнської конференції в 3-х частинах. 8-10 квітня 1998 року. Частина 2. - Дніпропетровськ, 1998. - 216 с., с.53-56.
3. Теплицький І.О., Семеріков С.О. Вивчення фрактальних кластерів за допомогою імітаційних комп'ютерних моделей // Збірник наукових праць Східноукраїнського державного університету. Серія "Машинобудування". - Луганськ, Видавництво Східноукраїнського державного університету, 1998. - 302 с, с. 276-289.

Семеріков С.О. Математичне моделювання фрактальних об'єктів.
- Рукопис.

Дисертація на здобуття освітнього ступеня магістра математики за напрямком – математика (математична освіта). - Криворізький державний педагогічний інститут, Кривий Ріг, 1998.

У дисертації методом комп'ютерного моделювання досліджено регулярні та статистичні фрактальні об'єкти. Узагальнено різні визначення неевклідових розмірностей та встановлено межі їх застосування. Сформульовано достатні умови фрактальності. Застосовано багатовимірний метод послідовних випадкових додавань для синтезу фрактальних поверхонь.

Ключові слова: фрактальна розмірність, скейлінг, нормований розмах, узагальнений броуновський рух, поверхня переносу.

Семериков С.А. Математическое моделирование фрактальных объектов. - Рукопись.

Диссертация на соискание образовательной степени магистра математики по направлению – математика (математическое образование). - Криворожский государственный педагогический институт, Кривой Рог, 1998.

В диссертации методом компьютерного моделирования исследованы регулярные и статистические фрактальные объекты. Обобщены различные определения неевклидовых размерностей и установлены границы их применимости. Сформулированы достаточные условия фрактальности. Применён многомерный метод последовательных случайных сложений для синтеза фрактальных поверхностей.

Ключевые слова: фрактальная размерность, скейлинг, нормированный размах, обобщённое броуновское движение, поверхность переноса.

Semerikov S.A. Mathematical Modelling of Fractals. - Manuscript.

Thesis for an educational degree of Master of Mathematics on speciality – Mathematics (Mathematical Education). - Krivoy Rog State Pedagogical Institute, Krivoy Rog, 1998.

The regular and statistical fractals were investigated by computer modelling method. The different definitions of non-Euclid dimensions were generalized. It's shown limits of their applicability. Sufficient conditions of fractal dimension are formulated. Multidimensional method of random successive additions was offered to syntheses of fractal surfaces.

Key words: fractal dimension, scaling, rescaled range, generalized Brownian motion, transfer surface.